UHCE 154

SESSION 2011

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Cachan - ENSAE

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 5 pages

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix du candidat. Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, le candidat pourra admettre les résultats des questions précédentes, du moment qu'il l'aura clairement indiqué.
Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice I

Soit $p, q \in]0,1[$ et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$h(t) = tp - \ln\Big[(1-q) + q\exp(t)\Big] \ .$$

Soit en outre $d :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$d(x,y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right) \ .$$

(1) Calculer $h'(t)$ puis $h''(t)$.

(2) Montrer que h admet un unique maximum sur $\mathbb{R}$, et déterminer en fonction de p et de q la valeur t^* où ce maximum est atteint.

(3) Montrer que $h(t^*) = d(p,q)$.

(4) Pour $x \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $f : y \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

(5) Pour $y \in]0,1[$ fixé, tracer l'allure du graphe de la fonction $g : x \mapsto d(x,y)$, en précisant les éventuelles tangentes et asymptotes remarquables.

(6) Montrer que $d(p,q) \geqslant 0$ pour toutes les valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$.

(7) Pour quelles valeurs de $(p,q) \in]0,1[^2$ a-t-on $d(p,q) = 0$?

(8) Montrer : $\forall (p,q) \in]0,1[^2 \ , \ d(p,q) \geqslant 2(p-q)^2$.

Exercice II

Soit N un entier strictement positif. On considère l'ensemble

$$\Omega = \{-1, 1\}^N = \Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_N) \,/\, \forall i \in \{1, \ldots, N\},\, \omega_i \in \{-1, +1\}\Big\} .$$

On munit Ω de la probabilité uniforme P : $\forall \omega \in \Omega\,,\ P(\{\omega\}) = 2^{-N}$.
Pour tout entier n compris entre 1 et N, on définit les variables aléatoires S_n et T_n par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_n(\omega) = \omega_1 + \cdots + \omega_n\,,$$
$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_n(\omega) = \mathrm{Card}\Big\{k \in \{1, \ldots, n\} \,/\, \omega_k = +1\Big\} .$$

La figure 1 donne une illustration graphique des variables aléatoires $(S_n)_n$ à laquelle on pourra réfléchir pour répondre aux questions. Toutefois, des considérations graphiques ne pourront pas, dans les réponses, tenir lieu de raisonnements.

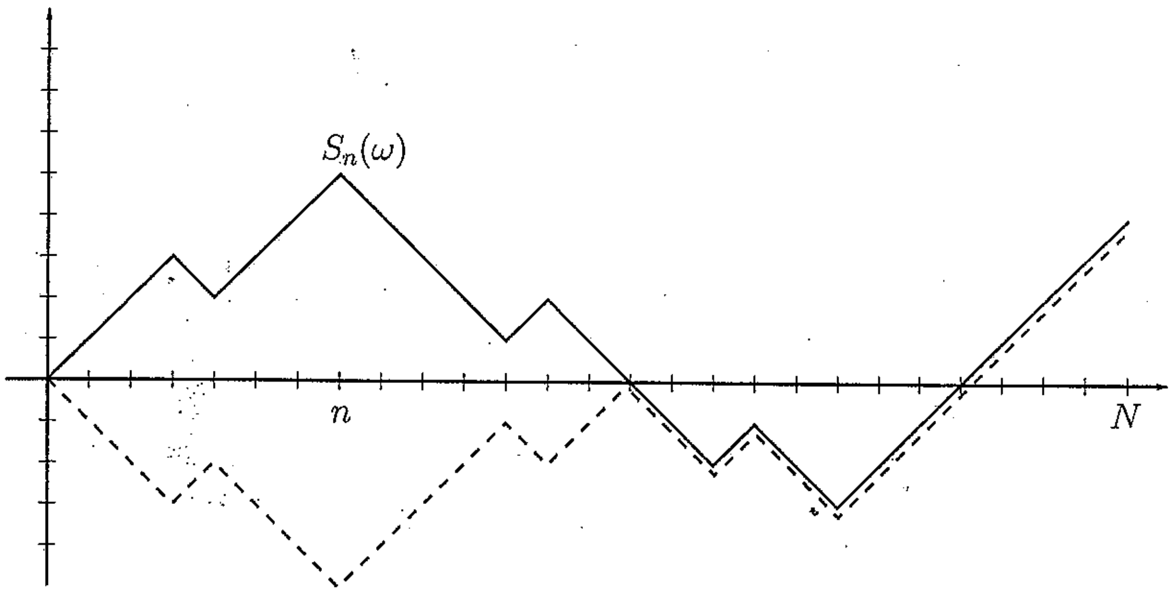

FIG. 1 – Trait plein : graphe de la fonction $n \mapsto S_n(\omega)$ pour $\omega = (+1, +1, +1, -1, +1, \ldots)$. Trait pointillé : graphe de la fonction $n \mapsto S_n(\omega')$ pour $\omega' = (-1, -1, -1, +1, -1, \ldots)$.

On considère, pour tout entier n compris entre 1 et N et pour tout entier relatif x, l'événement $E_{n,x} = \{\omega \in \Omega \,/\, S_n(\omega) = x\}$ noté plus simplement $\{S_n = x\}$, et on note $p_{n,x} = P(E_{n,x})$. Pour tout entier strictement positif k, on note de plus

$$q_{2k} = \binom{2k}{k} 2^{-2k} .$$

Dans les questions qui suivent, n désigne un entier compris entre 1 et N.

(1) Quelle est la loi de T_n ?

(2) Exprimer S_n en fonction de T_n. Quelles sont les valeurs prises avec probabilité strictement positive par la variable aléatoire S_n ?

(3) Donner l'expression de $p_{n,x}$ pour tout entier relatif x.

(4) Montrer que, quand $n = 2k$ est pair, $p_{2k,0} = q_{2k}$.

(5) Donner un équivalent de q_{2k} quand k tend vers l'infini. *On pourra utiliser la formule de Stirling : quand k tend vers l'infini,*

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\big(1 + o(1)\big) \ .$$

On suppose toujours que n est un entier compris entre 1 et N, mais on suppose désormais que x est un entier *strictement positif.* On introduit les événements suivants :

$$F_{n,x} = \{S_n = x\} \cap \{S_1 = +1\} \cap \left[\bigcup_{c=2}^{n-1} \{S_c = 0\}\right] \ ,$$

$$G_{n,x} = \{S_n = x\} \cap \{S_1 = -1\} \ ,$$

$$H_{n,x} = \{S_n = x\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{S_k > 0\} \ .$$

(6) Montrer que $F_{n,x} \cup H_{n,x} = E_{n,x} \cap \{S_1 = +1\}$.

(7) Trouver n' et x' tels que $P(G_{n,x}) = p_{n',x'}/2$.

(8) Montrer que $F_{n,x}$ et $G_{n,x}$ ont le même nombre d'éléments.
On pourra par exemple construire une application $\varphi : \Omega \to \Omega$ telle que $\varphi(F_{n,x}) = G_{n,x}$ et $\forall \omega \in F_{n,x}$, $(\varphi \circ \varphi)(\omega) = \omega$.

(9) Calculer $P(H_{n,x})$, puis en déduire une expression simple de $P(H_{n,x} | E_{n,x})$ en fonction de x et n.

(10) On suppose que n est pair. Trouver une expression simple de $P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_n \neq 0)$ en fonction de q_n.

(11) En déduire une expression simple de $P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{n-1} \neq 0, S_n = 0)$.

(12) Expliquer dans quelle mesure les résultats précédents permettent de répondre à la question suivante : au jeu de pile ou face, combien de parties faut-il jouer en moyenne avant d'avoir tiré exactement autant de piles que de faces ?

Problème

Soit $k \geqslant 1$ un entier. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est *stochastique* si

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,k\}, \quad M_{i,j} \geqslant 0$$

$$\text{et} \quad \forall i \in \{1,\ldots,k\}, \quad \sum_{j=1}^{k} M_{i,j} = 1 \ .$$

Soit $J = {}^t(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^k$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

(A) Matrices stochastiques en dimension deux

Soit $p, q \in [0,1]$. On considère dans cette partie la matrice

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} .$$

(1) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de P en fonction de p et q.

(2) La matrice P est-elle diagonalisable ?

(3) Pour quelles valeurs réelles λ existe-t-il une matrice stochastique $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant λ pour valeur propre ?

(B) Propriétés élémentaires des matrices stochastiques

(4) Soit $M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes.
(i) M est stochastique.
(ii) $MJ = J$ et les coefficients de M sont tous positifs ou nuls.

(5) Montrer que si M est stochastique, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, M^n est stochastique.

(6) Montrer que si M est stochastique et si λ est une valeur propre réelle de M, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

(C) Matrices ayant un vecteur propre donné

Soit $X \in \mathbb{R}^k$ un vecteur non nul. On note

$$E_X = \{ M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \,/\, X \text{ est vecteur propre de } M \} \ .$$

(7) Montrer que E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

(8) On définit l'application

$$\varphi_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ A & \longmapsto & AX \end{array} .$$

Montrer que φ_X est une application linéaire.

(9) Déterminer le rang de φ_X.

(10) Montrer que $E_X = \operatorname{Ker}(\varphi_X) \oplus \operatorname{Vect}(I_k)$, où $\operatorname{Vect}(I_k)$ désigne la droite vectorielle engendrée par la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

(11) Quelle est la dimension de E_X ?

(12) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base du noyau de l'application linéaire

$$F_X : Y \in \mathbb{R}^k \mapsto {}^tYX = \sum_{i=1}^{k} X_i Y_i \in \mathbb{R}\,.$$

Déterminer, à l'aide de $\mathcal{B}$, une base de E_X.

(D) Description de l'ensemble des matrices stochastiques

(13) On rappelle que $J = {}^t(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^k$. Déterminer une base de E_J lorsque $k = 2$.

(14) Déterminer une base de E_J pour $k \geqslant 2$ quelconque. Comment peut-on décrire l'ensemble des matrices stochastiques ?