C1492

Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**

Banque d'épreuves :

- **Concours ENS Cachan - Economie Gestion option I**
- **Concours ENSAI – option économie et gestion**

Session 2014

Composition de Mathématiques et Statistiques

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Le sujet comporte 7 pages, 3 exercices et 2 problèmes indépendants.

Recommandation : les exercices et les problèmes doivent être traités séquentiellement en respectant l'ordre préétabli

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

Pour étudier l'influence de la couleur sur la prise d'une décision on réalise l'expérience suivante. Le sujet est placé devant un tableau muni de quatre boutons A, B, C et D. Chaque bouton est d'une couleur différente, la couleur faisant l'objet de l'étude est représentée par le bouton D. Le sujet peut appuyer sur autant de boutons qu'il le désire mais un bouton après l'autre et chaque bouton ne peut être pressé qu'une seule fois. Si le sujet appuie sur le bouton D un signal sonore se déclenche et l'expérience est terminée.

Le déroulement de l'expérience peut être représenté par un schéma indiquant la suite des boutons pressés. Par exemple B $\to$ A $\to$ D signifie que le sujet a commencé par appuyer sur le bouton B, puis sur le A et finalement sur le D qui déclenche le signal sonore.

Première partie :

On suppose que dans toutes les situations le sujet choisit le bouton uniformément au hasard.

1. Quelle est la probabilité que le sujet déclenche le signal sonore au premier bouton pressé ?
2. Tracer l'arbre de toutes les possibilités de déroulement de l'expérience.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boutons pressés jusqu'au déclenchement du signal sonore. Quelles sont les valeurs prises par X ?
4. Donner la loi de X.
5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable X.
6. Quelle est la probabilité que le sujet appuie au moins sur trois boutons pour déclencher le signal sonore ?

Seconde partie :

Selon une certaine théorie, chaque fois que le sujet a le choix entre la couleur représentée par le bouton D et 3 autres boutons (représentant 3 autres couleurs), la probabilité qu'il appuie sur le bouton D est le double de celle d'appuyer sur au moins l'un des autres, et pour ces derniers le choix se fait au hasard.

1. Quelle est la probabilité que le sujet déclenche le signal sonore au premier bouton pressé ?
2. Tracer l'arbre de toutes les possibilités de déroulement de l'expérience.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boutons pressés jusqu'au déclenchement du signal sonore. Quelles sont les valeurs prises par X ?

4. Donner la loi de X.
5. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable X.
6. Quelle est la probabilité que le sujet appuie au moins sur trois boutons pour déclencher le signal sonore ?

Exercice 2

Soit $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de Γ.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \frac{e^{-u}u^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{si } u \geq 0. \end{cases}$
   Montrer que $f_n(u)$ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
5. Soient $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que $P[Y < n] = P[X > \lambda]$.

Exercice 3

Soit $(X_i, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent une loi de Bernouilli de paramètre p. Pour tout $i \geq 1$ on pose $Y_i = X_i + X_{i+1}$.

1. Donner la loi de $Y_i, i \geq 1$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $T_n = \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n}$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de T_n.
3. Montrer que la suite $(T_n)_{n>0}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante $X = 2p$.

$\boxed{\textsc{Probleme 1}}$

On considère la suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par $A(1), A(2), A(3)$ fixées et la récurrence

$$A(n+3) = A(n+2) + A(n+1) - A(n),\ n \geq 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $B(n) = A(n+2) - A(n)$.

1. Montrer que la suite $(B(n), n \geq 1)$ est la suite constante. En déduire l'expression de $A(n), n \geq 3$ en fonction de n, $B(1)$, et $A(1)$ ou $A(2)$.
2. On suppose que $A(1)$ et $A(2)$ sont diagonalisables dans une même base orthonormée. On notera $\mathcal{B}$ cette base commune de diagonalisation, et P la matrice de passage (de la base canonique à cette nouvelle base $\mathcal{B}$). Montrer que si $B(1) = \lambda I, \lambda \in \mathbb{R}$, alors toutes les matrices $A(n), n \geq 1$ sont diagonalisables dans $\mathcal{B}$.
3. Soit $D(n)$ la matrice représentative de $A(n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $D(n), n \geq 3$ en fonction de n, λ, et $D(1)$ ou $D(2)$. On suppose désormais que

$$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A(2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ A(3) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

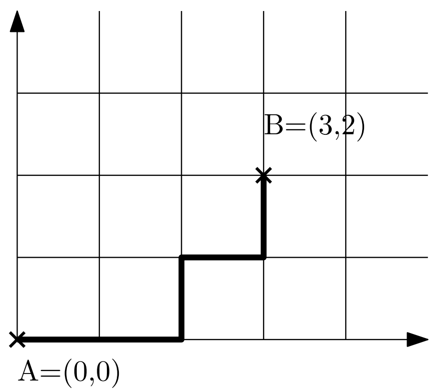
4. Montrer que $A(1)$ est diagonalisable, et calculer ses espaces propres.
5. Montrer que $A(2)$ est diagonalisable, et calculer ses espaces propres.
6. Calculer l'intersection de chaque espace propre de $A(1)$ avec chaque espace propre de $A(2)$.
7. En déduire que $A(1)$ et $A(2)$ sont diagonalisables dans une même base de vecteurs propres $\mathcal{B}$ et les diagonaliser dans cette base.
8. Calculer P^{-1} (où P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$).
9. Montrer que toutes les matrices $A(n)$ sont diagonalisables dans $\mathcal{B}$.
10. Soit $D(n)$ la matrice représentative de $A(n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Trouver l'expression de $D(n)$ en fonction de n (et la démontrer).
11. Calculer le produit $D(1)D(2)...D(2n+1)$, $n \geq 1$.
12. Calculer ${}^tPY$, où $Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    On définit par récurrence la suite $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_{n+1} = A(n)X_n,\ n \geq 1.$

13. Déterminer les nouvelles coordonnées X_1' du vecteur X_1 dans la base $\mathcal{B}$.
14. En déduire la valeur de ${}^tYX_{2n+2}$ pour tout $n \geq 1$.

PROBLEME 2

L'objet du problème est de compter le nombre de chemins reliant deux points d'un quadrillage, en effectuant uniquement des pas de gauche à droite (de (a,b) à $(a+1,b)$) et de bas en haut (de (a,b) à $(a,b+1)$).
Précisement, on appelera chemin reliant les points $A=(a,b)$ et $P=(p,q)$ de coordonnées entières une succession de pas, soit de gauche à droite, noté D, soit de bas en haut, noté H, telles que le nombre de D dans le chemin soit égal à $p-a$ et le nombre de H dans le chemin soit égal à $q-b$. La longueur du chemin est égale au nombre de termes D ou H dans le chemin. Par exemple, le chemin $c=(DDHDH)$ relie le point $(0,0)$ au point $(3,2)$, et est de longueur 5.



Dans toute la suite, p, q et $n \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers strictement positifs fixés.

Il est vivement conseillé d'illustrer les raisonnements par des dessins.

Préliminaires :

1. Partant de $A=(3,1)$, où arrive le chemin $(HDDHHH)$?
2. Enumérer tous les chemins reliant $(0,0)$ à $(1,3)$. Combien y en a-t-il ?
3. Quelle est la longueur d'un chemin reliant $A=(0,0)$ à $P=(p,q)$?
4. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur un chemin pour qu'il relie le point $A=(0,0)$ au point $P=(p,q)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Combien y-a-t-il de chemins de longueur n ?

Première partie :

On se propose de compter les chemins reliant $A=(0,0)$ à $P=(p,q)$. On appelle $N_{p,q}$ cette valeur.

1. On considère la fonction Φ sur les chemins qui échange les valeurs D et H. Par exemple, $\Phi(DDHD)=(HHDH)$. Montrer que Φ est une bijection.

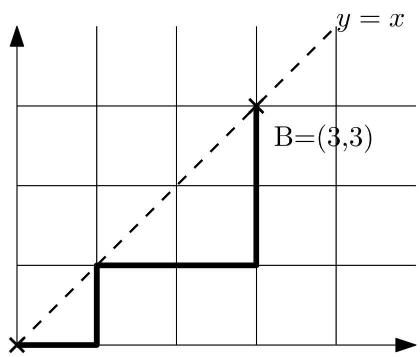
2. En déduire que $N_{p,q} = N_{q,p}$, nombre de chemins reliant $A = (0,0)$ à $Q = (q,p)$.
3. Montrer que $N_{p-1,q} + N_{p,q-1} = N_{p,q}$.
4. Soit c un chemin reliant $A = (0,0)$ à $P = (p,q)$. Combien y-a-t-il de D ? Quelle est la longueur du chemin ? En déduire directement la valeur $N_{p,q}$.
5. En comptant de deux façons différentes le nombre de chemins allant du point $A = (0,0)$ au point $B = (n,n)$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} N_{k,n-k}^2 = N_{n,n}$$

(indication : quelle est la longueur des chemins ?)

Seconde partie :

On s'intéresse désormais aux chemins allant du point $A = (0,0)$ au point $B = (n,n)$ restant toujours sous la diagonale (première bissectrice, $y = x$), mais qui peuvent la toucher. Ici un chemin sous diagonale de $A = (0,0)$ à $B = (3,3)$.



On note C_n le nombre de chemins sous la diagonale et l'on pose par convention $C_0 = 0$. Un chemin ne restant pas sous la diagonale sera appelé chemin franchissant. On note F_n le nombre de chemins franchissants.

1. Quel est le premier terme d'un chemin sous la diagonale ? le dernier ?
2. Calculer le nombre de chemins sous la diagonale, ne rencontrant la diagonale qu'aux extrémités A et B.
3. Soit c un chemin sous la diagonale rencontrant la diagonale au moins une fois en dehors des extrémités. On note $K = (k,k)$, $0 < k < n$ le premier point de rencontre. Montrer que le nombre de chemins sous la diagonale rencontrant la diagonale pour la premiere fois en $K = (k,k)$ est égal à $C_{k-1}C_{n-k}$.
4. En déduire la formule de récurrence

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$$

5. Calculer C_4 à l'aide de cette formule.
6. Que vaut la somme $C_n + F_n$?
7. Soit c un chemin franchissant. On note $K = (k, k)$, $0 < k < n$ le premier point de franchissement et $K' = (k, k+1)$ le premier point au dessus strictement de la diagonale. Le chemin c se décompose donc en un chemin c_1 de A K' suivi d'un chemin c_2 de K' à B. Quel est le point d'arrivé du chemin $\Phi(c_2)$ (où la fonction Φ est la fonction définie en première partie qui échange les valeurs D et H) partant de K' ? Montrer que la transformation d'un chemin c (franchissant en K) vers le chemin c' consistant en c_1 suivi de $\Phi(c_2)$ réalise une bijection des chemins franchissant vers tous les chemins reliant $A = (0, 0)$ à $B' = (n-1, n+1)$.
8. En déduire la formule $C_n = N_{n,n} - N_{n-1,n+1}$.
9. En utilisant la première partie, déduire de la question précédente la formule

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$